

# Comportement Mécanique des Matériaux

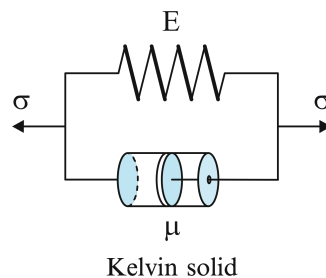
## EPFL - Cours MSE 234, Edition 2025

### Série d'exercices 8 du mercredi 17 décembre

#### CHAPITRE 5- Les polymères

##### Exercice 5-2

Considérez le modèle simple de Kelvin, utilisé pour simuler la loi de déformation uniaxiale des polymères



a - Comme vous le voyez, il s'agit d'un piston et d'un ressort, tous deux linéaires, assemblés en parallèle.

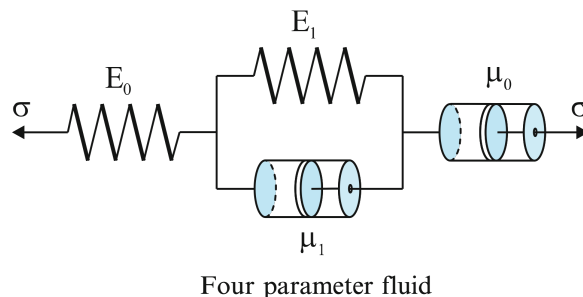
Montrez que lors d'un essai de fluage la réponse du solide viscoélastique simulée par cet élément est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

où  $\tau = \mu/E$  et  $\sigma_0$  est la contrainte appliquée.

b - Ce modèle est trop simple pour simuler le comportement des polymères thermoplastiques : pourquoi ?

c - Pour remédier à ce défaut, corriger le fait que le modèle de Kelvin a une rigidité infinie à  $t = 0$  et simuler le comportement des polymères thermoplastiques, on utilise plus souvent le modèle dit à quatre paramètres, où un ressort et un piston linéaires sont ajoutés en série au modèle de Kelvin :



Montrez que sa loi de déformation lors d'un essai de fluage est :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{t}{\mu_0} \right]$$

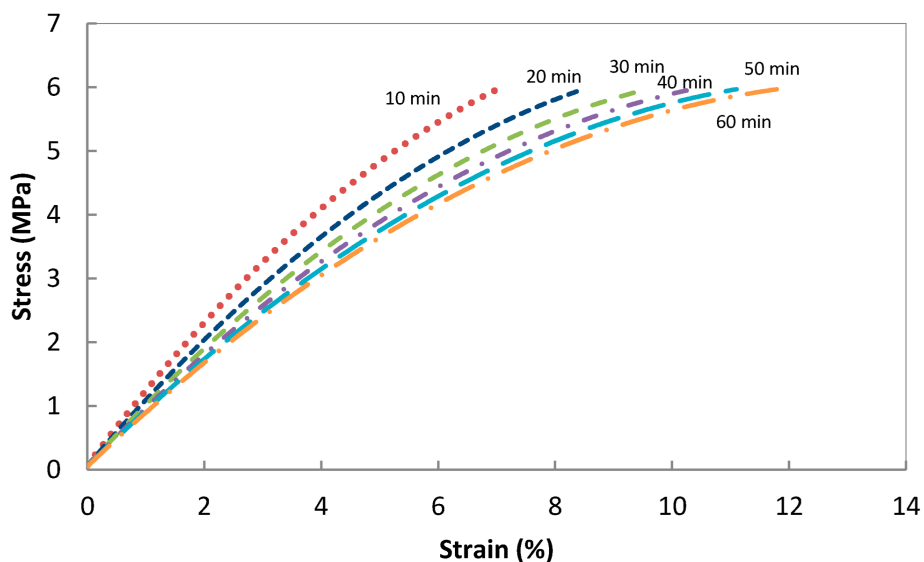
où  $\tau = \mu_1/E_1$  et  $\sigma_0$  est la contrainte appliquée.

d - Un matériau composé d'une matrice de polyéthylène de faible densité contenant des particules d'élastomère est soumis à une série d'essais de fluage, conduits pour une série de contraintes appliquées allant de 1 à 6 MPa, le tout à température ambiante par les auteurs de la publication scientifique suivante :

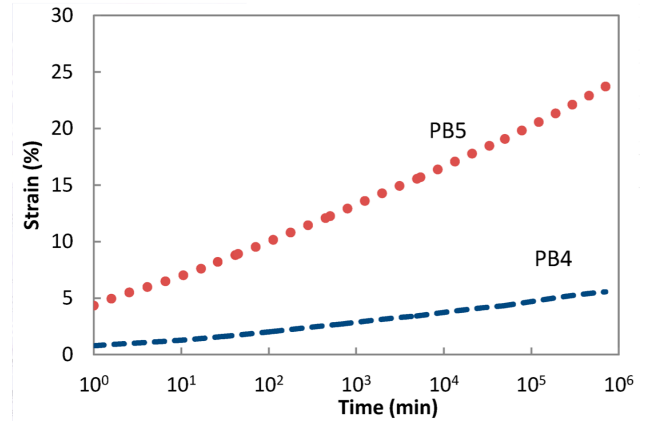
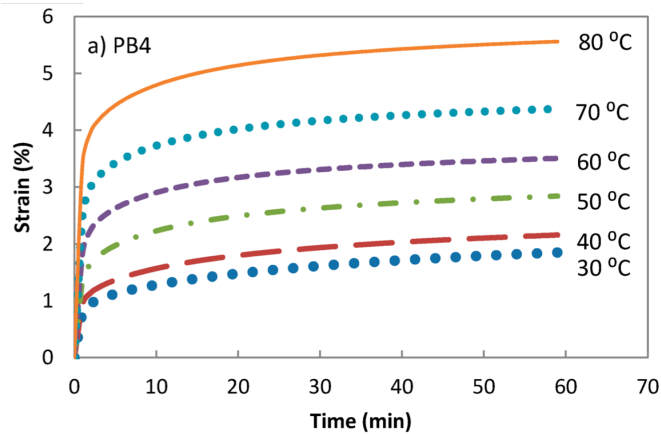
F. Daver, M. Kajtaz, M. Brandt, R.A. Shanks, Creep and Recovery Behaviour of Polyolefin-Rubber Nanocomposites Developed for Additive Manufacturing, *Polymers* 8 (2016) 437. <https://doi.org/10.3390/polym8120437>.

De ces essais de fluage les auteurs ont tracé un graphe où, pour chacune des contraintes appliquées lors de la série d'essais de fluage, les auteurs ont rapporté les déformations mesurées pour un temps d'essai donné, chaque temps donnant ainsi une courbe déformation-contrainte (dite isochrone).

Pourquoi le modèle à quatre paramètres ci-dessus ne peut-il pas être utilisé pour des contraintes appliquées supérieures à 3 MPa environ avec ce matériau ?



e – Les auteurs ont ensuite conduit une série d'essais de fluage en utilisant une charge appliquée de 1.2 MPa, inférieure à 3 MPa. En faisant varier la température pour un de ces matériaux polymériques (PB4) les courbes de fluage mesurées sont tracées dans le graphe de gauche donné ci-dessous :



Gauche : courbes de fluage, toutes pour une contrainte appliquée de 1.2 MPa, du composite LDPE/élastomère PB4. Droite : « master curve » pour la déformation à cette contrainte de 1.2 MPa et à une température de référence égale à 30°C pour ce matériau (ainsi qu'un autre, PB5), déduite des données de fluage dans le graphe de gauche en utilisant l'hypothèse du « Time Temperature Superposition Principle ».

De ces données les auteurs ont tracé la « master curve » donnée sur la figure de droite, donnant la déformation sous une contrainte de 1.2 MPa (et donc par implication la complaisance, qui n'est autre que le rapport des deux) à une température de référence égale à 30°C pour ce matériau (courbe PB4) en utilisant l'hypothèse du « Time Temperature Superposition Principle ».

Pouvez-vous expliquer avec précision comment les auteurs ont déduit la courbe de droite marquée PB4 à partir des données dans les courbes de gauche sur la base de l'hypothèse TTSP ?

Pour un maximum de clarté, rédigez votre réponse sous forme d'instructions précises écrites pour guider un/une opérateur/trice devant exécuter le travail sans le comprendre.

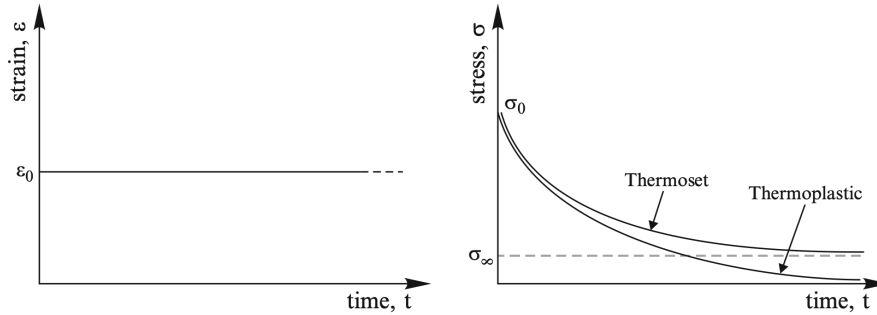
f – Quelle sera la déformation estimée, selon cette approche, que montrera ce matériau PB4 après avoir été soumis pendant un an à une contrainte de traction fixe de 1.2 MPa à 30°C.

g – Quelle sera la déformation estimée, selon cette approche, que montrera ce matériau PB4 après avoir été soumis pendant un an à une contrainte de traction fixe de 3 MPa à 30°C.

h – Pouvez-vous tracer sur le graphe ci-dessus la Master curve valable à 50°C au lieu de 30°C ?

#### Exercice 5-4

La caractérisation du comportement mécanique des polymères est souvent basée sur l'essai de relaxation (relaxation test), décrit par les graphes ci-dessous pour un comportement au-dessus de la température de transition vitreuse (glass transition temperature)  $T_g$  :



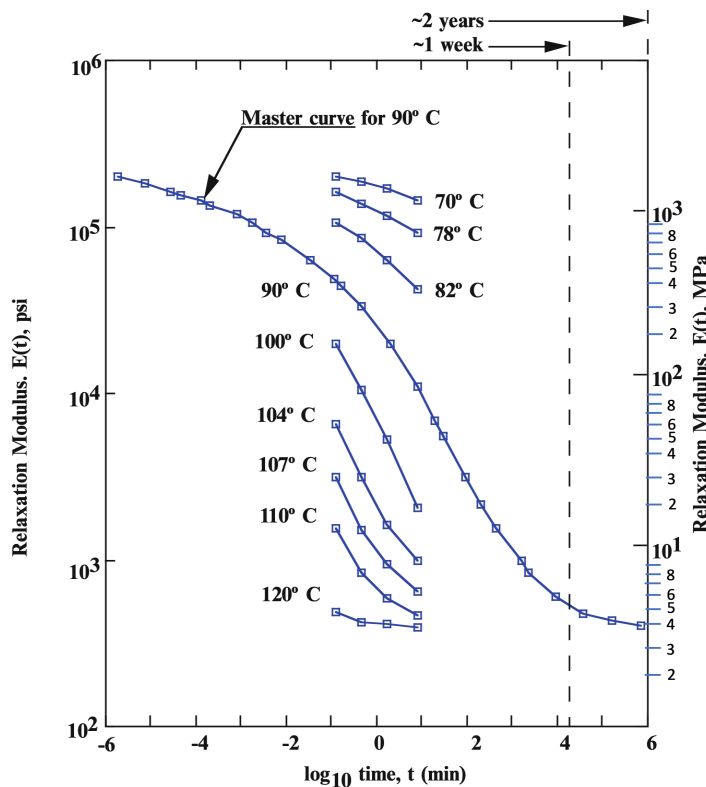
**Fig. 3.12** Relaxation test: strain input (*left*) and qualitative stress output (*right*)

a – Quelle est la raison physique, liée à leur structure, pour laquelle dans le graphe ci-dessus on voit cette différence entre un polymère thermoplastique (thermoplastic) et un polymère thermodurcissable (thermoset) ?

b – Pouvez-vous donner la définition du module de relaxation («relaxation modulus»)  $E(t)$  tel qu'on le déduit de cet essai ?

Le graphe ci-dessous décrit les données fournies par cet essai pour un polymère époxyde donné (c'est le même graphe qui fut donné en cours et dans vos exercices). Notez que les unités S.I. sont sur l'axe des ordonnées de droite, sur laquelle des valeurs détaillées ont été superposées sur l'axe logarithmique pour vous en faciliter la lecture.

Supposez que le comportement de ce polymère obéisse à la viscoélasticité linéaire. Comme on le voit, les données sur ce graphe pour ce polymère sont conformes à l'approche du TTSP («Time-Temperature Superposition Principle»), que l'on pourra donc utiliser pour répondre aux questions ci-dessous.



**Fig. 7.4** Master curve for a modified epoxy (Data from Cartner 1978)

c - Si un échantillon de cet époxy est allongé de 1% à 100°C, quelle est la contrainte appliquée requise une minute après le début de sa déformation ?

d – Si un échantillon de cet époxy est allongé de 1% à 100°C, quelle est la contrainte appliquée requise cent minutes après le début de sa déformation ?

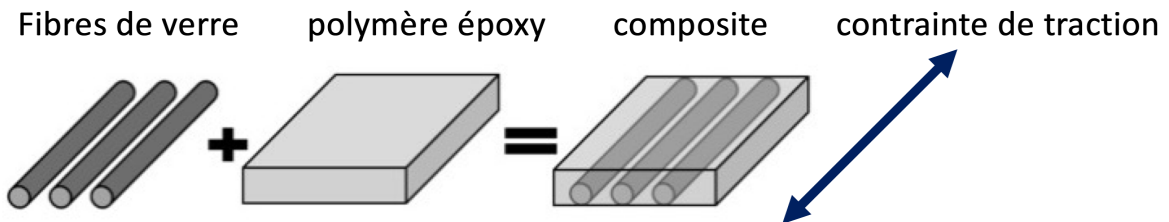
## CHAPITRE 6 – Composites et matériaux poreux

### Exercice 6-3

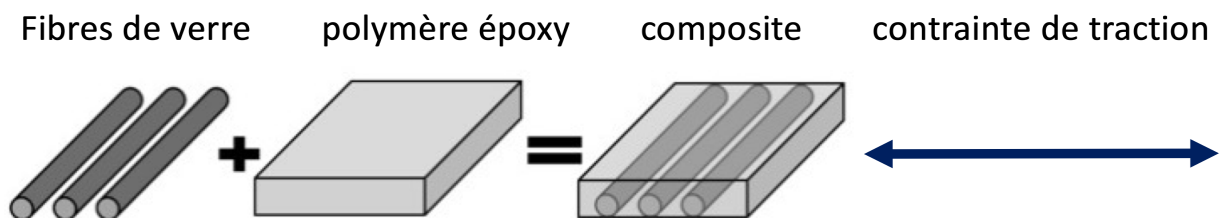
Considérons un composite à fibres longues composé de

- 25% par volume de fibres de verre longues, de module d'Young  $E = 70$  GPa, toutes parallèles et de :
- 75% par volume d'une matrice polymérique de module d'Young  $E = 5$  GPa puis ayant une contrainte d'écoulement constante  $\sigma = 50$  MPa lorsque son allongement  $\varepsilon$  excède 1.5%.

a – Quel est le module d'Young du composite selon la direction parallèle aux fibres ?

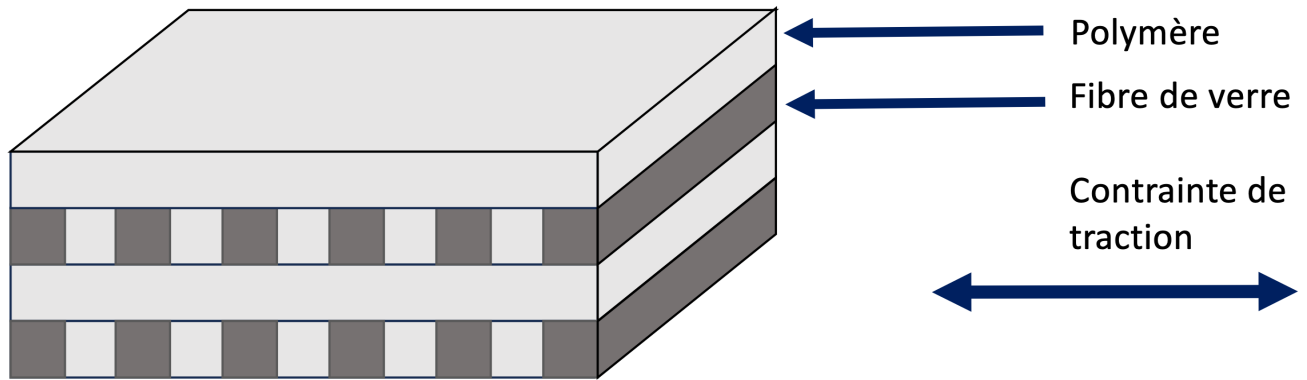


On va maintenant estimer le module d'Young du composite dans la direction perpendiculaire aux fibres :



Pour cela on va assimiler le composite à un assemblage de couches successives alternant

- une couche d'époxy pur dont la fraction volumique est  $V_{IE}$  et
- une couche de composite fait de 50% par volume de fibres de verre à section carrée, séparées par 50% par volume de fibres identiques d'époxy, comme dessiné ci-dessous :



b – Quelle est au sein de cette microstructure modèle du composite la fraction volumique  $V_{IE}$  des couches composées uniquement d'époxy pur ?

c - En combinant les lois des mélanges isodéformation et isocontrainte pour la structure décrite ci-dessus, pouvez-vous estimer le module d'Young du composite selon la direction perpendiculaire aux fibres ?

d – Que prédit la loi des mélanges isocontrainte si on l'utilise pour estimer le module d'Young du composite selon la direction perpendiculaire aux fibres et quel commentaire pouvez-vous faire concernant la différence entre cette valeur et l'estimation produite avec le modèle ci-dessus (combinaison des lois des mélanges isodéformation et isocontrainte décrite ci-dessus) ?

#### Exercice 6-4

Considérons un composite à fibres courtes composé de :

- une fraction volumique  $V_f$  de fibres courtes, élastiques linéaires et bien plus rigides que la matrice, toutes parallèles, toutes de même longueur  $l$  et de diamètre  $d$ , entourées par :
- une fraction volumique  $(1-V_f)$  de matrice élastomère dont la contrainte d'écoulement uniaxiale (uniaxial flow stress)  $\sigma_m$  à température ambiante  $T = 293K$  est donnée par  $\sigma_m = 5 (\epsilon_m)^{0.1}$  MPa où  $\epsilon_m$  est l'élongation uniaxiale (true tensile strain) de la matrice.

Ce composite est soumis à une contrainte de traction  $\sigma$  parallèle aux fibres.

La matrice étant bien plus complaisante que les fibres, elle va se déformer nettement plus que les fibres.

On fait les simplifications (fortes) suivantes :

- Les fibres ne se déforment pratiquement pas, faisant que l'élongation  $\epsilon_c$  du composite est  $(1-V_f)$  fois celle de sa matrice :  $\epsilon_c = (1-V_f) \epsilon_m$
- La matrice applique à chaque fibre, le long de l'interface fibre/matrice, une contrainte de cisaillement constante  $\sigma_{m,s}$  égale à la moitié de la contrainte moyenne dans la matrice :

$$\sigma_{m,s} = \sigma_m / 2$$

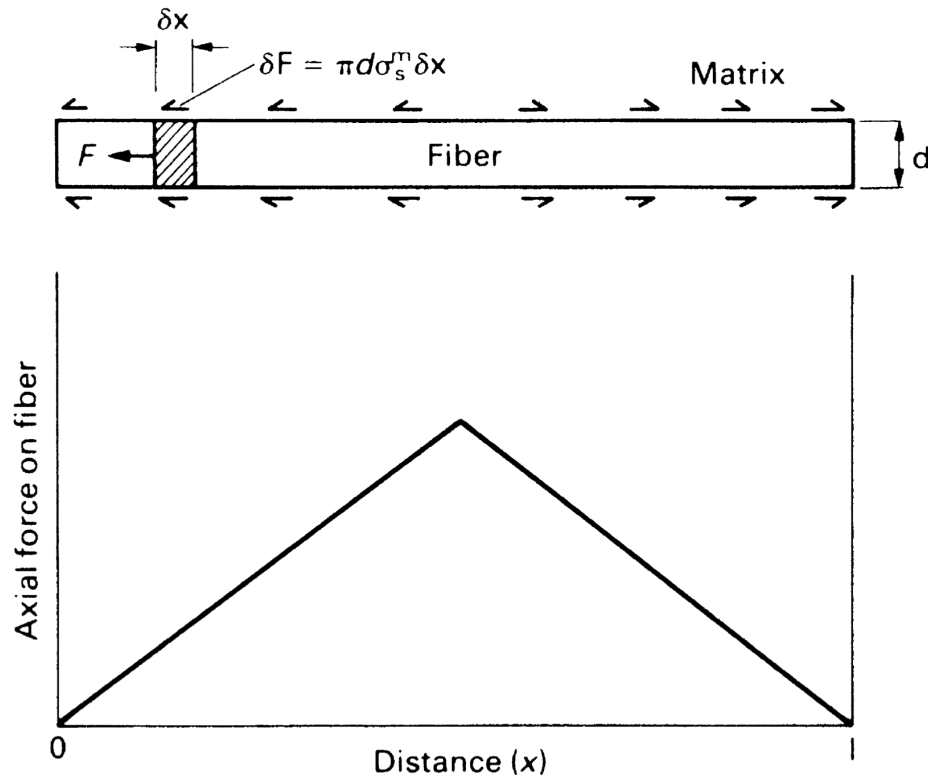
$\sigma_{m,s}$  est orientée vers le bout de fibre le plus proche, comme illustré ci-dessous.

Chaque segment de fibre de longueur  $\delta x$  va donc voir une augmentation graduelle, depuis son extrémité vers son centre, de la charge  $F$  qu'elle porte selon l'axe de la fibre, par la quantité  $\delta F = \sigma_{m,s} \pi d \delta x$  ;

- à chacun des bouts de la fibre la contrainte portée par la fibre,  $\sigma_f$  est nulle :

$\sigma_f = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = l$  avec  $x = 0$  placé à un bout de la fibre.

La charge axiale portée par la fibre,  $F(x)$  a donc le profil en triangle dessiné ci-dessous.



**FIGURE 28.4**

Load transfer from matrix to fiber causes the tensile stress in the fiber to rise to a peak in the middle.

a – Déduisez la force moyenne  $\bar{F}$  portée, quand le composite est allongé parallèlement aux fibres, par chaque fibre selon son axe en fonction de la contrainte moyenne portée par la matrice,  $\sigma_m$ .

b – Connaissant  $\bar{F}$ , déduisez la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}_f$  portée par chaque fibre selon son axe, quand le composite est allongé parallèlement aux fibres, par chaque fibre selon son axe en fonction de la contrainte moyenne portée par la matrice,  $\sigma_m$ .

c – Sachant que si  $V_f$  est la fraction volumique des fibres la contrainte moyenne portée par le composite est :

$$\sigma_{\text{composite}} = V_f \bar{\sigma}_f + (1 - V_f) \sigma_m$$

déduisez la loi de déformation  $\sigma_{\text{composite}} = F(\epsilon_c)$  du composite si  $V_f = 20\%$  et  $l = 20 d$

d – La loi de déformation de ce composite est-elle élastique ?

e – Si l'élastomère reste intact sans altération de son comportement d'élastomère, quelle sera sa loi de déformation à une température  $T$  de 500 K ?

f – Quelle sera alors la loi de déformation du composite de la question (c) à 500 K ?